



TITLE:

2隻の警備艇が使用可能な多時点確率取締ゲームの一段階ゲーム戦略 (数値最適化の理論と実際)

AUTHOR(S):

前原, 裕樹; 宝崎, 隆祐

CITATION:

前原, 裕樹 ...[et al]. 2隻の警備艇が使用可能な多時点確率取締ゲームの一段階ゲーム戦略 (数値最適化の理論と実際). 数理解析研究所講究録 2008, 1584: 188-198

ISSUE DATE:

2008-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/81488>

RIGHT:

2 隻の警備艇が使用可能な多時点確率取締ゲームの一段階ゲーム戦略

防衛大学校・理工学研究科 前原 裕樹(Hiroki Maehara)

Graduate School of Science and Engineering,

National Defense Academy

防衛大学校・情報工学科 宝崎 隆祐(Ryusuke Hohzaki)

Department of Computer Science,

National Defense Academy

1 はじめに

銃器や薬物等の密輸によって不法な資金の獲得を企てる密輸者と、これの摘発を行うべく活動する取締機関をプレイヤーとする密輸取締ゲームには、多時点にわたるモデルであり、かつ各時点において相手プレイヤーが採った行動を知ることのできる多段ゲームが多い[1,2]。しかし現実には、相手の採った行動を逐一確認することは困難な場合が多いことから、前回の報告[3]では、相手の採った行動に関する情報はプレイ中には一切得られず、期間中の全ての日の行動を一度に決定する一段階の多時点取締ゲームとして問題を定式化し、その最適戦略を導出した。

さらに現実的な取締活動を考えると、取締機関が一度に複数の取締艇を出動させ、パトロールを実施する場合も多い。そこで、ここでは取締側が2隻の取締艇を保有しており、1回のパトロールにつき最大2隻まで派遣することができるゲームとして問題を定式化し、最適戦略の導出を行う。一度に2隻を投入した場合には、1隻のみでパトロールを行なう場合に比べて密輸者の摘発に成功する確率は上がり、密輸の成功を許す確率は下がると考えるのが自然であろう。しかしながら、取締側は常に2隻でのパトロールを実施できるわけではなく、燃料費に対する予算制約等により出動回数は限られており、その中で成果をあげることが求められる。出動可能延べ隻数の制約を考慮すれば、2隻での出動の引き換えにパトロール実施日数自体は減少することを考えなければならず、一度に2隻ずつ出動させる戦略が最適であるか、それとも1隻ずつの出動でパトロール実施日をできるだけ確保する戦略を採るべきかが問題となる。

次章ではモデルの前提の説明から始め、定式化を行う。その後、一般的な支払行列による数値解法に加え、動的計画法による解法を提案する。

2 モデルの前提と定式化

ここでは、パトロールを実施するプレイヤーAと、密輸の実行を企てるプレイヤーBとの間で行われる、次のような2人ゼロ和ゲームを考える。

- (1) プレイヤーA, Bが1日に1回の行動をとる全体で N 日間のゲームを考える。
- (2) プレイヤーAは2隻の取締艇を保有しており、 N 日間の中で1回につき最大で2隻、期間中に延べ M 隻の艇の出動が可能であり、プレイヤーBは最大で L 日の密輸が実行可能である。

- (3) 1日の行動決定に際し、プレイヤーAはパトロールを取締艇2隻で実施、1隻で実施、またはパトロール未実施の3つの手を、プレイヤーBは密輸を実行するか否かの2つの手を持つ。
- (4) プレイヤーBの密輸実行日に1隻のみでパトロールを実施すれば、プレイヤーBは確率 p_1 で摘発され、密輸の成功も確率 q_1 で起こる。もし出動隻数が2隻であれば、確率 p_2 の摘発確率と確率 q_2 の密輸成功確率となる。ただし、 $p_1 + q_1 \leq 1$, $p_2 + q_2 \leq 1$, さらに $p_1 < p_2 < 1$, $q_1 > q_2$ とする。また、パトロールが実施されない日に密輸を決行すれば、密輸は必ず成功する。
- (5) プレイヤーBが摘発されるか、残り日数が尽きた場合にゲームは終了する。
- (6) 摘発によるプレイヤーAの利得は α (> 0)、密輸成功によるプレイヤーBの利得は1である。ただし、取締艇2隻でのパトロール実施日にはプレイヤーBは密輸に出ることはないことを保証するため、 $\alpha p_2 - q_2 > 0$ とする。ゲームの支払をプレイヤーAの利得で定義し、両プレイヤーの利得はゼロ和であるとする。
- (7) 両プレイヤーとも前提(1)~(6)に関し了解しているが、プレイヤーが採った行動は相手プレイヤーには一切知られない。

以上の前提のもとで行われる2人ゼロ和ゲームについて考えていく。前提(4)の不等式 $p_1 < p_2$ 及び $q_1 > q_2$ は、1隻のみでのパトロール実施に比べ、2隻でのパトロール実施では摘発成功確率が大きく、密輸の成功を許す確率が小さいことを表す。

まずは幾つかの記号を定義し、各プレイヤーの戦略を表現する。ゲームの行われる N 日を離散時点 $T = \{1, \dots, N\}$ で表現する。時点 $i \in T$ におけるプレイヤーAの戦略について、取締艇2隻でパトロール実施ならば $x(i) = 2$ 、1隻でパトロール実施ならば $x(i) = 1$ 、未実施ならば $x(i) = 0$ で表すと、プレイヤーAの純粋戦略は0、1または2の要素を持つ N 次元のベクトル $\mathbf{x} = \{x(i), i \in T\}$ で表される。同様に、プレイヤーBについては密輸実行を $y(i) = 1$ 、未実行を $y(i) = 0$ で表すと、プレイヤーBの純粋戦略は0及び1の要素を持つ N 次元のベクトル $\mathbf{y} = \{y(i), i \in T\}$ で表される。ただし、前提(2)の最大行動可能隻数の制約から、

$$\sum_{i=1}^N x(i) \leq M, \quad \sum_{i=1}^N y(i) \leq L \quad (1)$$

の制約が課される。

ここで、プレイヤーA、Bそれぞれの純粋戦略 \mathbf{x} , \mathbf{y} に対するプレイヤーAの期待利得を求めると次のようになる。まず、時点 n でのゲームを考えよう。ゲーム開始時から前日の時点 $n-1$ までに、プレイヤーBが密輸を実行し、かつプレイヤーAによる2隻でのパトロールが行われる日数、すなわち $(x(i), y(i)) = (2, 1)$ である時点数を $T_2(n)$ とすると $T_2(n) = \sum_{i=1}^{n-1} y(i)x(i)(x(i)-1)/2$ であり、密輸の実行と1隻でのパトロール実施が同時に行われる日数、すなわち $(x(i), y(i)) = (1, 1)$ である時点数を $T_1(n)$ とすると $T_1(n) = \sum_{i=1}^{n-1} y(i)x(i)(2-x(i))$ となる。これと前提(4)及び(5)から、摘発が起こらずに時点 n までゲームが続く確率は $(1-p_2)^{T_2(n)}(1-p_1)^{T_1(n)}$ である。

また、到達した時点 n でのプレイヤーAの期待利得について考えると、 $(x(n), y(n)) = (2, 1)$ の場合は、前提(4)及び(6)からプレイヤーAは確率 p_2 でプレイヤーBを摘発して利得 α を得るが、確率 q_2 で密輸の成功を許して1の損失を被るから、期待利得は $\beta_2 = \alpha p_2 - q_2$ である。同様に $(x(n), y(n)) = (1, 1)$ の場合の期待利得は $\beta_1 = \alpha p_1 - q_1$ である。ちなみに、(4)の不等式 $p_1 < p_2$ 及び $q_1 > q_2$ から $\beta_2 > \beta_1$ が成り立つ。

$(x(n), y(n)) = (0, 1)$, すなわちパトロールが実施されない状況でプレイヤーBが密輸を決定した場合は、前提(4)から密輸は確実に成功し、プレイヤーAは1の損失を被る。 $(x(n), y(n)) = (2, 0)$, $(1, 0)$ 及び $(0, 0)$ の場合、すなわちプレイヤーBが密輸を実行しない場合には、摘発も密輸の成功も起こり得ず利得は0である。以上のことから、時点 n でのプレイヤーAの期待利得は

$$\beta_2 y(n) x(n) (x(n) - 1) / 2 + \beta_1 y(n) x(n) (2 - x(n)) + (-1) y(n) (x(n) - 1) (x(n) - 2) / 2$$

とまとめて書ける。したがって、全期間における期待支払 $R(x, y)$ は次式で求められ、これがプレイヤーAが純粋戦略 $x = \{x(i), i \in T\}$ を、プレイヤーBが純粋戦略 $y = \{y(i), i \in T\}$ を採った場合のゲームの支払関数となる。

$$R(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N y(n) \{ \beta_2 x(n) (x(n) - 1) + 2\beta_1 x(n) (2 - x(n)) - (x(n) - 1) (x(n) - 2) \} (1 - p_2)^{T_2(n)} (1 - p_1)^{T_1(n)}. \quad (2)$$

3 支払行列による数値解法

前章における定式化の結果、各プレイヤーは(1)式を満たす有限個の純粋戦略をもち、支払関数は(2)式で与えられることが分かった。したがって、各プレイヤーの純粋戦略を羅列して支払行列を作成し、これに線形計画法を適用することにより問題を解くことができる。しかし、プレイヤーAの純粋戦略の間には次のような支配関係が存在し、プレイヤーAは(1)式の制約条件を満たす全ての戦略を使う必要の無いことが分かる。

補題1 プレイヤーAにとって、パトロールの許容出動延べ隻数 M を全て行使する戦略は、そうでない戦略を弱く支配する。

(証明) プレイヤーAの任意の純粋戦略 x に対し、ある時点での出動隻数を少なくした純粋戦略 x' は、プレイヤーBの任意の純粋戦略 y に対し $R(x, y) \geq R(x', y)$ となることから証明される。

ゲームの最適戦略を考える場合、プレイヤーBの純粋戦略としては N 日間で L 回以下の密輸を実行する総数 $\sum_{i=0}^L N C_i$ 通りの純粋戦略を考える必要があるが、プレイヤーAについては、補題1から N 日中に延べ M 隻分全てを出動させる純粋戦略のみを考えればよい。

4 動的計画法による解法

ここでは、動的計画法を用いて異なった観点からゲームの値について議論していく。前章で述べた線形計画法による均衡解の導出法は数値解法であり、これによって得られる数値解からゲームの性質を一般的に議論することは困難である。それを可能にするため、ここでは戦略を変数として取り扱い、解析的にゲームの値を求めることのできる動的計画法による解法を提案する。

4.1節では、プレイヤーBの任意の混合戦略に対する取締側の最適戦略を導出する。これにより、プレイヤーAの戦略を最適化することによる期待支払の最大化が行われる。それに引き続いてプレイヤーBの混合戦略を変化させることにより、最大期待支払の最小化を行い、ミニマックス値、すなわちゲームの値を求める。4.2節では、この動的計画法による手順を、簡単な具体例を用いて解説する。

4.1 ミニマックス値の導出と密輸者側の最適戦略

ここでは、プレイヤーBの任意の混合戦略に対するプレイヤーAの最適なパトロール計画の導出からゲームの値を求めていくが、まずは幾つかの記号を定義しよう。

前章における議論では、期間中の各日を時間の流れに沿った離散時点で表したが、ここでは残り時点数としてステージ番号を定義する。すなわち、時点 $n=1,2,\dots,N$ をステージ $s=N, N-1, \dots, 1$ で再定義する。これに伴い、時点 $i \in T$ におけるプレイヤーの戦略表現を、2章の $x(i)$, $y(i)$ からステージ i に対して定義される変数 $x_i = x(N-i+1)$, $y_i = y(N-i+1)$ を用いる。因みにプレイヤーA, Bの純粋戦略は、それぞれ $\mathbf{x} = \{x_N, x_{N-1}, \dots, x_1\}$, $\mathbf{y} = \{y_N, y_{N-1}, \dots, y_1\}$ で表す。このとき、プレイヤーBの実行可能な純粋戦略の集合は $Y = \left\{ \mathbf{y} \in \{0,1\}^N \mid \sum_{i=1}^N y_i \leq L \right\}$ である。さらに、純粋戦略 $\mathbf{y} \in Y$ を選択する確率を $\pi(\mathbf{y})$ とし、プレイヤーBの混合戦略を $\pi = \{\pi(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in Y\}$ (ただし、 $\pi(\mathbf{y}) \geq 0$, $\sum_{\mathbf{y} \in Y} \pi(\mathbf{y}) = 1$) で定義する。その他、ステージ i で密輸を実行する純粋戦略の集合を Z_i と表す。すなわち $Z_i = \{\mathbf{y} \in Y \mid y_i = 1\}$ とする。このとき、ステージ i において密輸が実行される確率は $\sum_{\mathbf{y} \in Z_i} \pi(\mathbf{y})$ である。

いま、ステージ i においてプレイヤーBの混合戦略 π が与えられ、残りのパトロール可能隻数が延べ m 隻分ある場合に、以後最適なパトロール戦略を採ることにより得られる期待利得の最大値を $f_i^m(\pi)$ とする。また、同じ状況にあるステージ i において2隻でパトロールを実施した場合に、ステージ i 以降に得られる期待利得の最大値を $d_i^m(\pi)$, 同じく1隻で実施の場合を $g_i^m(\pi)$, パトロールを未実施とした場合を $h_i^m(\pi)$ とする。 $d_i^m(\pi)$, $g_i^m(\pi)$ 及び $h_i^m(\pi)$ は、それぞれ以下の式を満たす。

$$d_i^m(\pi) = \beta_2 \sum_{\mathbf{y} \in Z_i} \pi(\mathbf{y}) + \left(1 - p_2 \sum_{\mathbf{y} \in Z_i} \pi(\mathbf{y})\right) f_{i-1}^{m-2}(\Lambda_i^2 \pi), \quad (3)$$

$$g_i^m(\pi) = \beta_1 \sum_{\mathbf{y} \in Z_i} \pi(\mathbf{y}) + \left(1 - p_1 \sum_{\mathbf{y} \in Z_i} \pi(\mathbf{y})\right) f_{i-1}^{m-1}(\Lambda_i^1 \pi), \quad (4)$$

$$h_i^m(\pi) = - \sum_{\mathbf{y} \in Z_i} \pi(\mathbf{y}) + f_{i-1}^m(\pi). \quad (5)$$

上記(3)~(5)式の右辺第1項はステージ i で発生する期待支払を表し、右辺第2項は、ステージ $i-1$ 以降での期待支払の最大値を表す。ただし、(3)式の $\Lambda_i^2 \pi$ は、ステージ i での2隻のパトロールによって摘発が起こらなかったという条件のもとでの π の事後確率を意味し、

$$\Lambda_i^2 \pi(\mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{\pi(\mathbf{y})(1-p_2)}{1-p_2 \sum_{\mathbf{z} \in Z_i} \pi(\mathbf{z})}, & y_i = 1 \text{ のとき} \\ \frac{\pi(\mathbf{y})}{1-p_2 \sum_{\mathbf{z} \in Z_i} \pi(\mathbf{z})}, & y_i = 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (6)$$

である。どちらの式も分母はステージ i での2隻によるパトロール実施によって摘発が起こらない確率を表しており、分子は2隻でのパトロールが実施され、かつ摘発が起こらない確率を表している。プレイヤーBが密輸を実行する上の式の分子には、摘発が起こらない確率 $1-p_2$ が掛けられており、密輸を実行しない下の式の分子には、摘発が起こらない確率1が掛けられている。(6)式は、 $y_i = 0, 1$ のいずれの場合にも次式のように統一して書くことができる。

$$\Lambda_i^2 \pi(\mathbf{y}) = \frac{\pi(\mathbf{y})(1-p_2 y_i)}{1-p_2 \sum_{\mathbf{z} \in Z_i} \pi(\mathbf{z})}. \quad (7)$$

(4)式の $\Lambda_i^1 \pi$ については、ステージ i での取締艇1隻でのパトロールによって摘発が起らなかったという条件のもとでの π の事後確率を意味している。これは、2隻での場合を考えた上記の議論を、2隻を1隻、摘発成功確率の p_2 を p_1 と読み替えることで、次のように導くことができる。

$$\Lambda_i^1 \pi(y) = \frac{\pi(y)(1-p_1 y_i)}{1-p_1 \sum_{z \in Z_i} \pi(z)}. \quad (8)$$

これらの記号を用いると、プレイヤーAの最適な純粋戦略によるステージ i 以降での最大期待支払 $f_i^m(\pi)$ は次の漸化式で表される。

$$m \geq 2 \text{ のとき } f_i^m(\pi) = \max \{d_i^m(\pi), g_i^m(\pi), h_i^m(\pi)\} \quad (9)$$

$$m = 1 \text{ のとき } f_i^m(\pi) = \max \{g_i^m(\pi), h_i^m(\pi)\} \quad (10)$$

$$\text{初期条件: } f_0^0(\pi) = 0, \quad (11)$$

$$\text{境界条件: } f_i^0(\pi) = -\sum_{j=i-1}^i \sum_{y \in Z_j} \pi(y) \quad (12)$$

$$f_i^1(\pi) = \beta_1 \sum_{y \in Z_i} \pi(y), \quad (13)$$

$$f_i^{2t}(\pi) = \sum_{y \in Y} \pi(y) \sum_{j=i-1}^i y_j \beta_2 (1-p_2)^{\sum_{j=i+1}^i y_j}. \quad (14)$$

$t=0$ の場合の(11)式は明らかである。 $m=0$ 、すなわち残り出動可能隻数が0の場合は、ステージ i 以降で実行される密輸は確実に成功する。したがって、ステージ $i \in [1, t]$ において密輸を実行する確率に -1 を掛けた期待支払 $-\sum_{y \in Z_i} \pi(y)$ を、ステージ1から i まで和をとった(12)式のように表される。 $t=m=1$ の場合、補題1からステージ1では1隻でパトロールを実施することとなり、(13)式となる。また、 $m=2t$ 、すなわち残りの全ステージにおいて2隻ずつの出動が可能な場合に関しては、補題1からプレイヤーAは全ステージで2隻ずつでのパトロールを実施する戦略を採ることとなり、(2)式に $x(i)=1$ 、 $i=N-t+1, \dots, N$ を適用させることで導出できるが、これは次のように導出することもできる。

2隻の取締艇でのパトロールが常に行われるとして、プレイヤーBの任意の純粋戦略 y に対する期待支払を求めよう。ステージ $i \in [1, t]$ における期待支払を考えると、ステージ i からステージ i の一つ前の時点であるステージ $i+1$ までに密輸が実行される回数は $\sum_{j=i+1}^i y_j$ であり、摘発が起らずにステージ i からステージ i までゲームが続く確率は、 $(1-p_2)^{\sum_{j=i+1}^i y_j}$ と書ける。したがって、プレイヤーBの純粋戦略 y に対するステージ i 以降での期待支払は $\sum_{j=i-1}^i y_j \beta_2 (1-p_2)^{\sum_{j=i+1}^i y_j}$ となる。ところで、各純粋戦略 y を採る確率は $\pi(y)$ であるから、期待支払としては(14)式のように表される。

$f_i^m(\pi)$ は、(3)～(5)式を用いて、ステージ i においてパトロールを2隻で実施する場合、1隻で実施する場合、パトロールを未実施とする場合の期待支払をそれぞれ計算し、その中の最大値である。もし最大値が(3)式による $d_i^m(\pi)$ であれば、プレイヤーAはステージ i において2隻のパトロールを実施するのが最適であり、最大値が $g_i^m(\pi)$ であれば1隻でのパトロール実施が、 $h_i^m(\pi)$ ならばパトロール未実施が最適となる。また、例えば最大値が $d_i^m(\pi)=g_i^m(\pi)$ であれば、出動隻数が2隻でも1隻でも期待支払は等しくなり、いずれの手も採ることができると解釈できる。

初期条件から(9)式または(10)式を用いて逐次計算していくことにより、プレイヤーBが初期時点の

ステージ N で混合戦略 π を採った場合の最大期待支払 $f_N^M(\pi)$ 及び π に対するプレイヤー A の最適純粋戦略が求められることになる。

プレイヤー B の混合戦略 $\pi = \{\pi(y), y \in Y\}$ は $\pi(y) \geq 0$ 及び $\sum_{y \in Y} \pi(y) = 1$ を満たすから、その実行可能領域は $|Y|-1$ 次元の単位単体を構成する。この領域上で $f_N^M(\pi)$ を最小にする点 π^* を見つければ、そこでの $f_N^M(\pi)$ の値がミニマックス値、すなわちゲームの値であり、 π^* がプレイヤー B の最適混合戦略となる。

4.2 密輸者側の最適戦略の導出例

簡単な例として、 $N=2$, $M=2$, $L=1$ の場合に、前節で提案した動的計画法により均衡点を求めてみよう。このときのプレイヤー B の純粋戦略は、2 日のうちの何れかの日に密輸を実行する 2 つの戦略と、密輸を一切行わない戦略の計 3 通りあり、それぞれを $y^1 = \{1, 0\}$, $y^2 = \{0, 1\}$, $y^3 = \{0, 0\}$ で表すことにする。ただし、時間の流れに沿って要素を並べた表記法 $y = \{y(1), y(2)\} = \{y_2, y_1\}$ で表現している。このとき、ステージ 1, 2 で密輸を実行する純粋戦略の集合は、それぞれ $Z_1 = \{y_2\}$, $Z_2 = \{y_1\}$ である。純粋戦略 y^1 , y^2 を採る確率 $\pi(y^1)$, $\pi(y^2)$ をそれぞれ π_1 , π_2 と簡略化して書くことにすると、純粋戦略 y^3 を採る確率 $\pi(y^3)$ は $1 - \pi_1 - \pi_2$ と表される。したがって、 $\sum_{y \in Z_1} \pi(y) = \pi_2$, $\sum_{y \in Z_2} \pi(y) = \pi_1$ となる。(9)~(14)式を用いて逐次計算していくと、プレイヤー B の混合戦略 π に対する最大期待支払 $f_2^2(\pi)$ は次のようになる。

$$f_2^2(\pi) = \begin{cases} d_2^2(\pi) = \beta_2 \pi_1 - \pi_2, & \pi_2 < \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_1 + 1} \pi_1 \text{ かつ } \pi_2 < \pi_1 \text{ のとき } (x_2^* = 2) \\ g_2^2(\pi) = \beta_1(\pi_1 + \pi_2), & \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_1 + 1} \pi_1 \leq \pi_2 < \frac{\beta_1 + 1}{\beta_2 - \beta_1} \pi_1 \text{ のとき } (x_2^* = 1) \\ h_2^2(\pi) = -\pi_1 + \beta_2 \pi_2, & \pi_1 \leq \pi_2 \text{ かつ } \frac{\beta_1 + 1}{\beta_2 - \beta_1} \pi_1 \leq \pi_2 \text{ のとき } (x_2^* = 0) \end{cases} \quad (15)$$

(15)式右辺の 3 つの式において、プレイヤー A のステージ 2 における最適戦略 x_2^* は(9)式から分かる。ステージ 1 における最適戦略について考えると、(12)式の第 1 番目のケースでは、ステージ 2 で 2 隻を出動させ、ステージ 1 ではパトロールを実施しない純粋戦略を採った場合の期待支払を意味するから、 $f_2^2(\pi) = d_2^2(\pi)$ であるときのステージ 1 における最適戦略は $x_1^* = 0$ である。また、2 番目のケースはステージ 1, 2 の両方で 1 隻ずつを出動させる場合の期待支払を、3 番目のケースはステージ 2 でパトロールを実施せず、ステージ 1 で 2 隻を出動させる場合の期待支払を意味することから、 $f_2^2(\pi) = g_2^2(\pi)$ の場合は $x_1^* = 1$, $f_2^2(\pi) = h_2^2(\pi)$ の場合には $x_1^* = 2$ となる。すなわち、(15)式右辺の 3 つの式において、プレイヤー A の最適純粋戦略は、上から順に $x^* = \{2, 0\}$, $\{1, 1\}$, $\{0, 2\}$ である。ただし、 $\beta_2 \geq 2\beta_1 + 1$ の場合は次のように書ける。

$$f_2^2(\pi) = \begin{cases} d_2^2(\pi) = \beta_2 \pi_1 - \pi_2, & \pi_2 < \pi_1 \text{ のとき } (x_2^* = 2, x_1^* = 0) \\ h_2^2(\pi) = -\pi_1 + \beta_2 \pi_2, & \pi_1 \leq \pi_2 \text{ のとき } (x_2^* = 0, x_1^* = 2) \end{cases} \quad (16)$$

図 1 は、横軸に π_1 , 縦軸に π_2 をとり、(15)式による $f_2^2(\pi)$ の区分を表したものである。また、表 1 は区分された各領域に対するプレイヤー A の最適戦略 $x^* = \{x_2^*, x_1^*\}$ 及び $f_2^2(\pi)$ の式を表す。プレイヤー B の混合戦略の実行可能領域は、 $\pi_1 \geq 0$, $\pi_2 \geq 0$, $\pi_1 + \pi_2 \leq 1$ を満たす 2 次元単位単体を構成する。ただし、上述したとおり 3 番目の純粋戦略 y^3 を選択する確率 π_3 は、 $\pi_3 = 1 - \pi_1 - \pi_2$ である。上の結果から、

プレイヤーAの最適戦略は3つの領域で異なり、 π_1 と π_2 が大きく異なる場合には、密輸が実行される確率が高い方の日に2隻を出動させる戦略を採用することが最適となる。例えば、領域①の混合戦略は、2日目に密輸を実行する確率 π_2 に比べ1日目の実行確率 π_1 が高いが、この混合戦略に対するプレイヤーAの最適戦略は、密輸実行確率の高い1日目に2隻でのパトロールを実施し、2日目を未実施とする戦略 $\mathbf{x}^* = \{2, 0\}$ である。しかし、 π_1 と π_2 の差が比較的小さい領域③の混合戦略に対する最適なパトロール戦略は、各日に1隻ずつ取締艇を出動させる戦略 $\mathbf{x}^* = \{1, 1\}$ である。

また、 β_1 に対して相対的に β_2 が大きくなれば、領域①及び②が拡大し、(16)式の最適解が成り立つ条件 $\beta_2 \geq 2\beta_1 + 1$ では、プレイヤーAの最適な純粋戦略は、密輸実行確率が高い方の日に2隻を出動させる $\mathbf{x}^* = \{2, 0\}$ 又は $\{0, 2\}$ となることが分かる。図2は、横軸に π_1 、縦軸に π_2 をとり、(16)式による $f_2^2(\pi)$ の区分を表したものであり、表2はこのときの各領域に対するプレイヤーAの最適戦略 \mathbf{x}^* 及び $f_2^2(\pi)$ を表す。

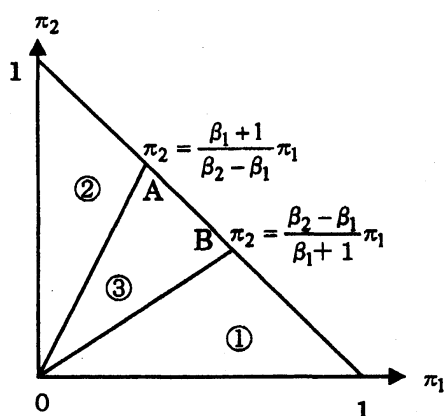


図1 プレイヤーAの最適戦略による区分
($\beta_2 < 2\beta_1 + 1$ の場合)

表1 最適なパトロール実施戦略と最小期待支払

($\beta_2 < 2\beta_1 + 1$ の場合)

領域	プレイヤーAの最適戦略	$f_2^2(\pi)$
①	$\mathbf{x}^* = \{2, 0\}$	$\beta_2 \pi_1 - \pi_2$
②	$\mathbf{x}^* = \{0, 2\}$	$-\pi_1 + \beta_2 \pi_2$
③	$\mathbf{x}^* = \{1, 1\}$	$\beta_1(\pi_1 + \pi_2)$

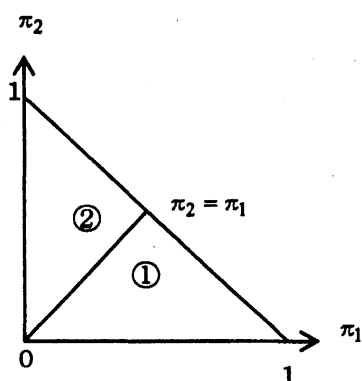


図2 プレイヤーAの最適戦略による区分
($\beta_2 \geq 2\beta_1 + 1$ の場合)

表2 最適なパトロール実施戦略と最小期待支払

($\beta_2 \geq 2\beta_1 + 1$ の場合)

領域	プレイヤーAの最適戦略	$f_2^2(\pi)$
①	$\mathbf{x}^* = \{2, 0\}$	$\beta_2 \pi_1 - \pi_2$
②	$\mathbf{x}^* = \{0, 2\}$	$-\pi_1 + \beta_2 \pi_2$

それでは具体的に $\alpha=2$, $p_2=0.5$, $q_2=0.3$, $p_1=0.3$, $q_1=0.7$ と設定してゲームの値を求めてみよう。このとき, $\beta_2=0.7$, $\beta_1=-0.1$ であり, 図1のケースとなる。 π_1 - π_2 平面の各点に対し, プレイヤーBの混合戦略に対する期待支払の最大値 $f_2^2(\pi)$ の大きさを3次元空間の z 座標で表したものが図3であり, $z=0.7\pi_1-\pi_2$, $z=-0.1(\pi_1+\pi_2)$, $z=-\pi_1+0.7\pi_2$ の3つの平面から成る。この図から, 図1の線分 AB に対応する部分が最小値を与えることが分かる。すなわち, $\pi_1+\pi_2=1$, $8/17 \leq \pi_1 \leq 9/17$ 上でミニマックス値が与えられ, その値は $\beta_1=-0.1$ となる。

次に, 取締艇1隻のみでのパトロール実施時における密輸の成功確率 q_1 のみを減少させ, $q_1=0.4$ とした場合を図示したものが図4である。このとき $\beta_1=0.2$ であり, $\beta_2 < 2\beta_1+1$ が成り立つことから, プレイヤーAの最適戦略によるプレイヤーBの戦略の実行可能領域の区分は図1のケースに該当する。最大期待支払を表す平面の境界については図1から明らかであるが, q_1 の減少はプレイヤーAにとって1隻の取締艇でのパトロール実施効果が増加することを意味するから, 1隻ずつ2日間のパトロールが最適戦略である中央の領域③が拡大すると解釈できる。また, β_1 の増加により, この領域内のプレイヤーBの混合戦略に対する最大期待支払が増加し, ミニマックス値を与える点 π^* の座標は $(\pi_1, \pi_2)=(0,0)$ となり, その値は0となる。このとき $\pi_3=1$ であり, プレイヤーBの最適混合戦略は, 密輸を行わない戦略 $y^3=\{0,0\}$ を確率1で採用して利得0を確保することであり, 密輸を実行する戦略を採れば期待支払は正となり, プレイヤーA側を利することとなる。以上の2つの具体例から分かるように, 2隻でのパトロールによる効果が小さく, $\beta_2 < 2\beta_1+1$ が成り立つ場合のゲームの値は β_1 の値に依存し, $\beta_1 < 0$ のときゲームの値は β_1 , $\beta_1 \geq 0$ ならば0となる。

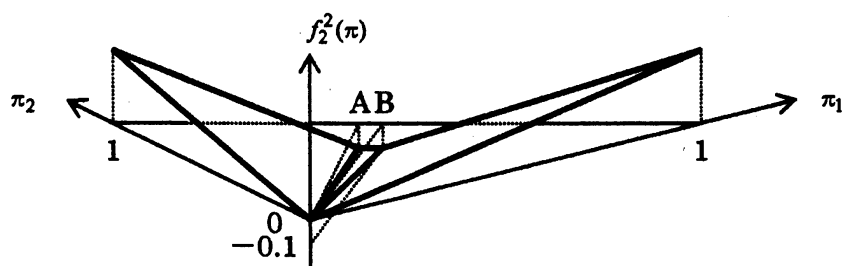


図3 最大期待支払 ($q_1=0.7$)

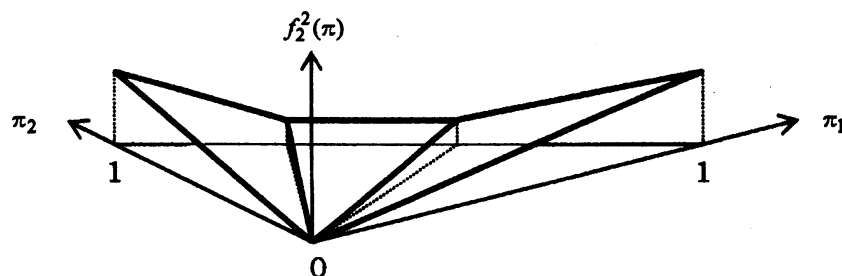


図4 最大期待支払 ($q_1=0.4$)

図5及び6は、横軸に π_1 、縦軸に π_2 をとり、 $\beta_2 \geq 2\beta_1 + 1$ が成り立つ場合の(16)式による $f_2^2(\pi)$ の大きさを3次元空間の z 座標で表したものである。 $\pi_1 = \pi_2$ を境界として、 $z = \beta_2\pi_1 - \pi_2$ と $z = -\pi_1 + \beta_2\pi_2$ の2つの平面が接する形となる。この最大期待支払を表す平面は、 $(\pi_1, \pi_2) = (1, 0)$ 及び $(0, 1)$ で $z = \beta_2 > 0$ 、 $(\pi_1, \pi_2) = (0, 0)$ で $z = 0$ 、 $(\pi_1, \pi_2) = (0.5, 0.5)$ で $z = 0.5(\beta_2 - 1)$ の値をとるから、均衡点は $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0.5, 0.5, 0)$ か $(0, 0, 1)$ のどちらかであり、そのどちらになるかは β_2 の値に依存する。 $\beta_2 < 1$ のとき、均衡点は $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0.5, 0.5, 0)$ でゲームの値は $0.5(\beta_2 - 1)$ 、 $\beta_2 \geq 1$ ならば均衡点は $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0, 0, 1)$ でゲームの値は0となる。

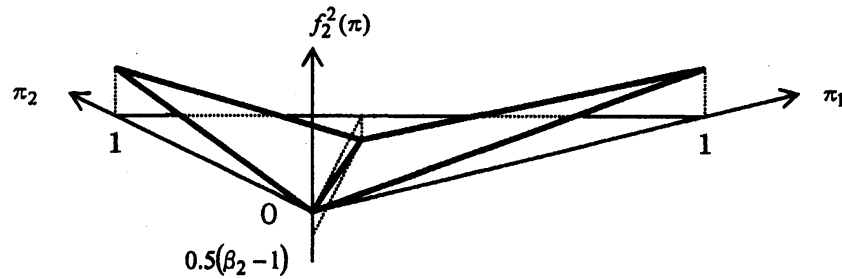


図5 最大期待支払 ($\beta_2 \geq 2\beta_1 + 1, \beta_2 < 1$)

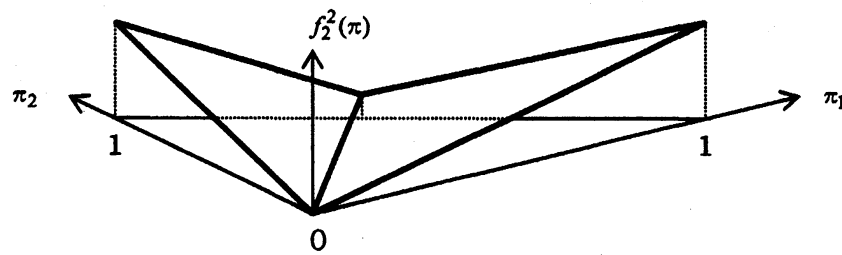


図6 最大期待支払 ($\beta_2 \geq 2\beta_1 + 1, \beta_2 \geq 1$)

5 数値例

3章で提案した線形計画法による数値解法により、 $N=7$ 、 $M=4$ 、 $L=4$ のゲームについて、各プレイヤーの最適戦略を求めた。プレイヤーの最適混合戦略については、プレイヤーA、Bそれぞれの純粋戦略 x 、 y に対する最適な選択確率として得られるが、その混合戦略の性質を見るために次のような処理を行った。まずプレイヤーBの最適混合戦略について、純粋戦略 y を選択する確率 $\pi^*(y)$ により、ステージ i で密輸を実行する確率は $\sum_{y \in Z_i} \pi^*(y)$ となり、時点毎の密輸を実行する確率を求めた。さらに、期間中の密輸予定回数の期待値が $\sum_{y \in Y} \pi^*(y) \sum_{i=1}^N y(i)$ により得られる。プレイヤーAについても、最適混合戦略から各時点における取締艇2隻でのパトロール実施確率及び1隻でのパトロール実施確率をそれぞれ求めた。

図7は、 $N=7$ 、 $M=4$ 、 $L=4$ 、 $\alpha=3$ 、 $p_2=0.5$ 、 $q_2=0.1$ 、 $p_1=0.3$ 、 $q_1=0.4$ のゲームについて、各プレイヤーの最適戦略を求め、上の計算結果を横軸に時点、縦軸に実行確率をとって図示したものである。このとき $\beta_2=1.4$ 、 $\beta_1=0.5$ である。このときのプレイヤーAの最適戦略は、一度に2隻の出動を

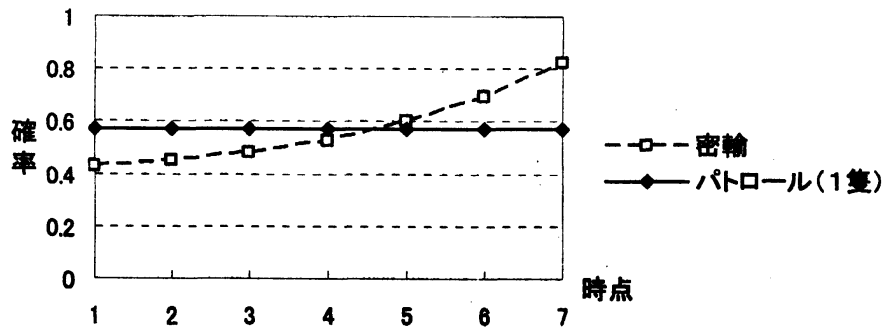


図 7 各時点におけるパトロール及び密輸実施確率 ($p_2 = 0.5$)

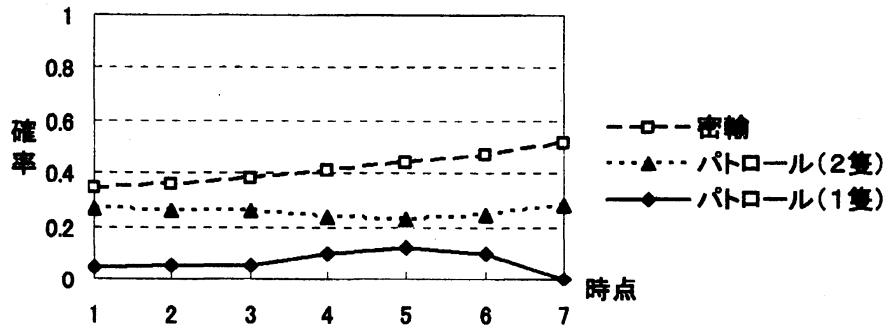


図 8 各時点におけるパトロール及び密輸実施確率 ($p_2 = 0.65$)

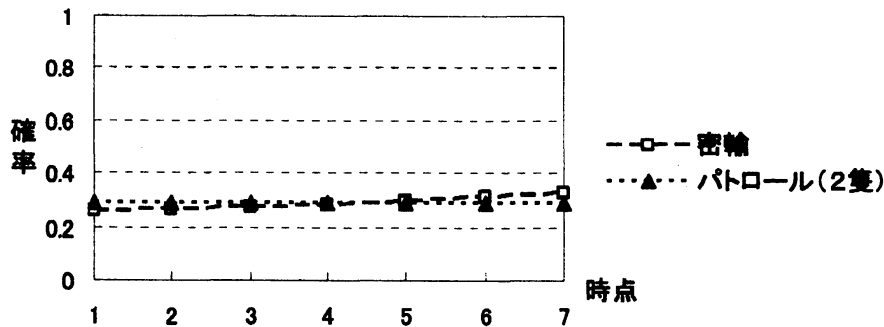


図 9 各時点におけるパトロール及び密輸実施確率 ($p_2 = 0.7$)

含む純粋戦略は採用せず、1隻ずつ4日のパトロールを実施する純粋戦略のみを採用し、いずれの時点も1隻でのパトロール実施確率を $4/7$ の等確率とするものである。パトロール日数を少なくしてまで一度に2隻を出動させるよりも、1隻ずつで摘発の機会を多く確保する戦略の方が有効であることが分かる。一方、プレイヤーBは実行可能な4回の密輸実行から成る戦略のみを採用する。密輸を実行したときに取締艇1隻によるパトロールが実施されていても、摘発される確率 p_1 が小さい、すなわ

ち摘発を逃れる確率が大きいということであるから、実行可能な4回全ての密輸実行を予定することができる。しかしながら、早い時点で摘発されれば、密輸可能回数を残したままゲームを終了することとなるから、早い時点では密輸の実行を控えるのが良いことが分かる。ちなみに、このときのゲームの値は -0.35 である。

次に、2隻でのパトロール時における摘発確率 p_2 のみを変化させ、 $p_2 = 0.65$ としたときのパトロール及び密輸の実行確率を図示したのが図8である。 $\beta_2 = 1.85$ と増加するのに伴い、プレイヤーAは一度に2隻を出動させる戦略も採用することになる。これに伴いプレイヤーBの密輸実行確率は下がり、密輸の予定実行回数は2.9回、ゲームの値は -0.28 に増加する。

さらに、 $p_2 = 0.7$ としたときの実行確率を図示したのが図9である。このときのプレイヤーAは、2隻ずつ2日パトロールを実施する戦略のみを採用し、各時点で2隻によるパトロールを実施する確率は $2/7$ となる。パトロールが実施される日数は高々2日であるが、密輸を試みた時点でパトロールも実施されていた場合に摘発される確率 p_2 が大きいと、プレイヤーBは密輸の実行機会を放棄せざるを得ない。このため、2回の密輸実行から成る戦略のみを採用し、ゲームの値は -0.19 となる。

6 おわりに

ここでは、期間中に相手の行動に関する情報が得られない場合の多時点取締ゲームに関し、一度に最大で2隻までパトロールに出動させることが可能な場合に拡張したモデルについて議論した。解法として、線形計画法を用いた一般的な解法に加え、ゲームの性質に関する一般的議論を可能にするため、動的計画法による解法も提案した。

ここで取り扱ったゲームは、プレイヤーの利得や任務の成功確率は期間を通じて一様であるとしたが、密輸や密漁といった洋上での取締活動を想定した場合、これらは海象による影響を大きく受けるため、時点毎に変化するものとするのが現実的であろう。また、密輸者は出来るだけ早いうちに密輸を成功させたいと考えるであろうから、この点を考慮に入れることも必要である。

殊に密輸のような重大犯罪に対する取締は、ここで取り上げたゲームのように、複数の取締艇を可能な限り出動させることにより行うのが一般的である。しかし、監視能力や速力等の異なる取締艇の運用によりパトロールを実施するケースが多いことから、性能の異なる複数の取締艇が使用可能な場合のゲームへと拡張すれば、より現実的な取締戦略計画の問題になると思われる。

参考文献

- [1] M. Sakaguchi, A sequential game of multi-opportunity infiltration, *Mathematica Japonica*, 39, pp.157-166, 1994.
- [2] R. Hohzaki, D. Kudoh and T. Komiya, An inspection game taking account of fulfillment probabilities of players, *Naval Research Logistics*, 53, pp.761-771, 2006.
- [3] 前原裕樹, 宝崎隆祐, 多時点確率取締ゲームの一段階ゲーム戦略, 京都大学数理解析研究所講究録 1548, pp.91-98, 2007.